

経済学における数学の応用・効用について*

高木一郎

Applications and Usefulness of Mathematics in Economics

by

Ichiro TAKAGI**

(Received October 31, 2013)

Abstract

In the early 19th century mathematics was started to be utilized to build and prove economic theories by such economists as Cournot, Edgeworth and Walras. Since then mathematics has become very important tool for economists. At the early stage of mathematical economics, differential calculus was a main tool. However, nowadays all sorts of mathematics are used in economics, and especially topology became one of main tools for mathematical economics. In this paper, I introduce famous economists who use mathematics for their contributions to building and expanding important economic theories. At the same time, I will show some examples how mathematics is applied in economic analysis.

序章: 数理経済学の黎明期

初めに数理経済学 (Mathematical Economics) の発展の歴史を通して、経済学における数学の重要性(応用・効用)について述べる。

数理経済学とは経済現象を数理モデル化して数学的に解析し、説明する学問分野をいう。19世紀に確率と関数の考えを経済分析に導入して、数理経済学の祖と言われるアントワーヌ・オーギュスタン・クールノー (Antonie Augustin Cournot: 1801 – 1877, 数学者・哲学者・経済学者, 1838年「富の理論の数学的原理に関する研究」, リヨン大学の解析学・力学の教授), 経済学的分析に数学的手法を活用し、一般均衡理

*本論文は 2013 年 1 月に大阪大学大学院情報科学研究科情報数理学専攻で行った招待講演を書き起こしたものである。

**東海大学総合経営学部マネジメント学科教授/大学院産業工学研究科情報工学専攻研究指導教授

論を定式化したレオン・ワルラス(Marie Esprit Leon Walras: 1834-1910, フランス生まれの経済学者, 一般均衡理論および限界革命論の理論構築に貢献した. 主な著書として 1874 年(上巻)・1877 年(下巻)(*Eléments D'économie politique pure, ou théorie de la richesse sociale*)「純粋経済学要論」があり, シュンペーターは「全ての経済学者の中で最も偉大」であると評価している, また, 経済分析に数学的手法を積極的に活用し, パリ国立高等鉱業学校中退, ローザンヌ大学教授)並びに社会科学に数学的手法を適用した先駆者フランシス・エッジワース(Francis Ysidro Edgeworth: 1845-1926, 1881 年「数理心理学」(Mathematical Psychics: Essays on the Application of Mathematics to the Moral Sciences), オックスフォード大学教授)等により数学の経済学への応用が試みられた.

ところで, 経済理論への数学の応用が本格化したのは, 19 世紀後半の限界革命の時代である. 限界効用は効用関数の微分係数であり, 限界費用は費用関数の微分係数であることに象徴されるように, この時代の数学の応用の中心は微分学の応用であった.

そして, 19 世紀後半から 20 世紀初めにかけての集合論や位相幾何学の発展の成果は, 1920 年代以降に経済学に導入された. この時代で最も有名なものが, ブラウワーの不動点定理を使い均衡点の存在の証明およびゲーム理論の導入等で有名なジョン・フォン・ノイマン(John Von Neumann: 1903-1957, ハンガリー出身のアメリカの数学者, 8 歳で微分積分をマスターし, 23 歳で数学・物理・化学の 3 分野で博士号取得, 作

用素環論・エルゴート理論・正則公理等で有名, プリンストン大学教授)は, 1928 年に論文「社会的ゲーム理論について」でゲーム理論の諸概念を経済学に紹介し, 1936 年に論文「経済的一般均衡のモデル」で, 多数の部門が均一の比率で成長する経済での均衡の存在を証明した.

また, 価格調整による一般均衡というワルラスの考えは, その後, 1930 年代から 1940 年代にジョン・ヒックスとポール・サミュエルソンによって厳密に数学的な表現が与えられた. ところで, ジョン・ヒックス(John Hicks: 1904-1989, LSE, オックスフォード大学名誉教授)は, IS-LM 分析, 資本理論, 並びに消費理論で経済学に貢献し, 一般的経済均衡理論および福祉理論に対する先駆的貢献により, 1972 年ノーベル経済学賞を受賞した.¹また, ポール・サミュエルソン(Paul Anthony Samuelson: 1915-2009, クルーグマンの恩師, MIT 名誉教授)は, 新古典派総合の創始者であり, 専門分野は数理経済学および経済成長理論である. 静学的・動学的経済理論の発展に貢献し, 経済学を数学的に精密化しモデル科学として立脚させた功績により 1970 年ノーベル経済学賞を受賞した. 彼らの貢献によって, 数理経済モデルはミクロ経済学, マクロ経済学, 財政学, 国際経済学, 労働経済学等の経済学の多くの分野で用いられるようになった.

第2章: 近年の数理経済学の動向

1954 年に 20 世紀経済学史上の最重要人物の一人とされ経済学全般において革命的な論文を多く書いたケネス・ジョセフ・アロー(Kenneth Joseph Arrow: 1921-, 一

般的経済均衡理論および厚生理論に対する先駆的貢献により 1972 年ノーベル経済学賞(51 歳)を受賞した。社会学学士, コロンビア大学経済学博士, ハーバート大学教授, スタンフォード大学名誉教授)とジェラルド・ドブリュー(Gerard Debreu: 1921–2004, フランスの経済学者・数学者で, トポロジーの経済分析への導入やコアに関する極限定理で有名であり, 一般均衡理論の徹底的な改良と経済理論に関する新たな分析手法の開発により 1983 年にノーベル経済学賞を受賞した。数学学士・修士・博士, カリフォルニア大学名誉教授)によって一般均衡の存在が不動点定理等の数学的手法で証明された。彼らの方法は, 1950 年にジョン・ナッシュ(John Forbes Nash, Jr.:1928–, 数学者・経済学者, 微分幾何学・リーマン多様体の研究で有名であり, 非協力ゲームの均衡の分析に関する理論の開拓により 1994 年ノーベル経済学賞を受賞した。1950 年 “Equilibrium Points in N-person Games” (PNAS), “The Bargaining Problem” (Econometrica), 1953 年 “Two-person Cooperative Games” (Econometrica), 1952 年 “Real algebraic manifolds” (Annals of Mathematics), 1954 年 “C1-isometric imbeddings” (Annals of Mathematics), 1956 年 “The imbedding problem for Riemannian manifolds” (Annals of Mathematics), 1966 年 “Analyticity of the solutions of implicit function problem with analytic data” (Annals of Mathematics)等の主要論文がある。また, ハリウッド映画「ビューティフル・マインド」はナッシュをモデルにしている。数学学士・修士・博士, カーネ

ギーメロン大学・MIT・プリンストン大学教授)がゲームにおける均衡の存在を証明した方法を用いている。ゲーム理論は, 経済学から他の学問分野への数学的手法の応用の好例といえる。現代の数理経済学において, ゲーム理論の占める位置は非常に大きい。その影響の大きさにより, ゲーム理論が経済学の方法論を革新したと評価されることもある。フォン・ノイマンとオスカー・モルゲンシュテルン(Oskar Morgenstern: 1902–1977: ドイツ生まれのアメリカの経済学者, プリンストン大学教授)は, 1944 年の「ゲーム理論と経済行動」(Theory of Games and Economic Behavior)でゲーム理論を経済学に導入し, 現代のミクロ経済学の基礎を構築した。ゲーム理論は, 当初から経済学への応用が意図されていたが, ゲーム理論を用いた分析はコアなどの協力ゲーム理論の応用を除いて長らく低調であった。しかし, 1980 年代になると経済学における非協力ゲーム理論の有用性が広く認められるようになり, 本格的なゲーム理論を利用した研究が始まった。現在では経済学における均衡概念としてナッシュ均衡とその精緻化が広く受け入れられている。プリンストン大学でオスカー・モルゲンシュテルンからゲーム理論を学んだ鈴木光男(1928–, 東京工業大学教授)が日本でのゲーム理論の父と呼ばれているが, 彼の教え子にマクロ経済学で著名な小野善康(1951–, 大阪大学教授, 内閣府経済社会総合研究所長)がいる。

また, 1950 年代には, アローは宇沢弘文(1928–, 数学学士, 東京大学名誉教授, 1956 年渡米, スタンフォード大学・カリフォルニア大学で研究活動, 1964 年シカゴ大

学経済学部教授、1968 年東京大学教授)や
レオニード・ハーヴィッツ (Leonid Hurwicz: 1917–2008, ロシア生まれのユダヤ系アメリカ人で数学者・経済学者, メカニズムデザインの基礎理論の確立により 2007 年ノーベル経済学賞を受賞した。ミネソタ大学名誉教授, 弟子に青木昌彦スタンフォード大学名誉教授・京都大学名誉教授, 西條辰義大阪大学社会経済研究所教授, 並びに 2000 年ノーベル賞受賞者ダニエル・マクファデン MIT 教授・ミネソタ大学名誉教授)とともに非線形計画法・線形計画法の経済学への応用について研究した。ダニエル・マクファデン(Daniel Little McFadden: 1937–, 離散選択分析理論と計算法の開発で有名であり, ミクロ計量経済学において, 個人と家計の消費行動を統計的に分析する理論と手法の構築により 2000 年ノーベル経済学賞を受賞した。彼の有名な著書は 1990 年 “Preferences, Uncertainty, and Optimality: Essays in honor of Leonid Hurwicz” (Westview Press)である, ミネソタ大学物理学学士, MIT・カリフォルニア大学バークレー校教授)は, 離散選択型分析理論とその計算手法の開発によって, ジェームズ・ヘックマン (James Joseph Heckman: 1944–, 労働経済学の計量経済学的な分析方法の精緻化により 2000 年ノーベル経済学賞を受賞した。コロンビア大学・シカゴ大学教授) とともにノーベル経済学賞を受賞した。

上述したように, ジョン・フォン・ノイマンやジョン・ナッシュ等の数学者の経済学への参入により, 20C 中頃には数理経済学は飛躍的な発展を遂げた。近年の経済理論では数理経済学や金融工学などの分野か

らの研究成果が多いため, 数理経済学と理論経済学の区別が曖昧になってきているために, 現在では「数理経済学」は, 数学を使う経済モデルの構築や経済モデルの数学的な妥当性の検証などの研究を意味することが一般的である。ところで, 経済数学は初級から中級にかけての経済学に必要な数学を指し, 数理経済学とは異なる。また, 近年では応用数学の分野で経済に関連する諸問題の研究が行われているが, その内容は数理経済学と重複しているといえる。さらに, 上述したように, ワルラス以降の一般均衡理論においては, ブラウワーによる不動点定理(数学において, ある一般的な形の条件をみたす関数 F に対して「 F には, 少なくとも一つの不動点(つまり、 $F(x) = x$ が成り立つような点 x)が存在する」という結論を述べる諸々の定理)や分離定理(separation theorem: J. トービンがマーコビッツ理論に無リスク証券(資産)の存在を加えることで発展させた現代ポートフォリオ理論の 1 つであり, 「トービンの分離定理」ともいう。この定理の延長線上に CAPM(資産価格決定モデルがある)とであり, 数学的事実が一般均衡解の存在や均衡の安定性の証明に用いられようになった。また, 角谷(Shizuo Kakutani: 1911–2004, 東北帝国大学数学学士, 大阪帝国大学・エール大学教授)が 1941 年に発表した不動点定理(角谷の不動点定理)はブラウワーの不動点定理を一般化したものである。経済学やゲーム理論において, 角谷の不動点定理は現在でも頻繁に使われている。特に, ゲーム理論においてはナッシュ均衡の存在を示すために, 経済学においては一般均衡解

の存在を示すために、角谷の不動点定理は決定的な役割を果たした。

さて、新古典派マクロ経済学は、ケインジアン経済学に対抗する過程において、経済動学を扱うモデリングを必要とすることが明らかになり、動学的最適化の手法がマクロ経済学にとって必要不可欠になった。現在の経済動学における数理経済学は、差分方程式を用いつつ離散型力学系のモデルを援用した動学的計画法における多期間最適化の議論が中心となっている。例として、最適成長モデルや世代重複モデルなどの議論があるが、世代間の個人消費や異時点間でどのように資源を配分して個人が消費を決定するかなどを想起すると分かりやすい。森嶋通夫(1923－2004、大阪大学名誉教授・LSE 名誉教授、大阪大学社会経済研究所、1968 年渡英)は、経済成長の最適化にターンパイク定理を応用している。有名なリカードの等価定理や等価定理を拡張したロバート・バロー (Robert Joseph Barro: 1944－、マクロ経済学者、物理学士、ハーバート大学教授) の中立命題は、動学的なモデリングがもたらすインプリケーションの良い例である。また、確率過程を導入した合理的期待仮説や条件付行動などの応用は、ランダムウォーク解釈やマンデル・フレミングモデルにおける財政政策および金融政策の有効性・無効性など、その応用や拡張は現実の経済にも影響を及ぼしている。さらに、ロバート・マンデル (Robert Alexander Mundell: 1932－、カナダ人の経済学者、さまざまな通貨体制における金融・財政政策「マンデル・フレミングモデル」と「最適通貨圏」についての分析への功績により 1999 年ノーベル経済学賞、コロ

ンビア大学教授) は国際経済学の理論の構築にグラフを用いて大きく貢献した。

ところで、数理経済学は従来避けられる傾向にあった計量経済学等の学問分野との並立にも可能性を広げている。特に、新しい古典派モデルにおける確率過程の援用やカリブレーション(モデルから予想される予測値)と実際のデータとの比較によって、議論が陶冶されるようになっている。

第 3 章：著名な経済学者の数学におけるバックグラウンドと業績

以下に著名な経済学者および数理経済学者の研究業績と数学におけるバックグラウンドを列挙する。

ヴィルフレド・パレート (Vilfredo Federico Damaso Pareto: 1848－1923、イタリアの技師・経済学者・社会学者・哲学者、トリノ工科大学数学・物理学・建築学学士、ローザンヌ大学経済学教授) はパレート最適で有名である。

アーヴィング・フィッシャー (Irving Fisher: 1867－1947、アメリカの数理経済学者、エール大学数学学士・経済学博士、エール大学教授) は、貨幣数量説、フィリップス曲線・無差別曲線への貢献で有名である。1892 年 “Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices” (価値と価格の理論の数学的研究)、1911 年 “The Purchasing Power of Money” (貨幣の購買力) を著した。

ジョン・ケインズ (John Maynard Keynes: 1883－1946、経済学者、ジャーナリスト、思想家、投資家、エコノミック・ジャーナル編集長、大蔵省官僚、イングランド銀行理事、ケンブリッジ大学数学学

士・修士・博士，ケンブリッジ大学教授）は，ケインズ革命，有効需要，乗数理論，確率論，ケインズ経済学（Keynesian Economics）等では有名であり，マクロ経済学の父と呼ばれている。

ラグナル・フリッシュ(Ragnar Anton Kittil Frisch: 1895－1973, ノルウェーの経済学者，オスロ大学経済学学士・統計学博士，オスロ大学経済学教授)は，計量経済学者で，経済過程の分析に対する動学的モデルの発展と応用により 1969 年ノーベル経済学賞を受賞した。

フランク・ラムゼイ(Frank Plumpton Ramsey: 1903－1930, イギリスの経済学者・数学者・哲学者，ケンブリッジ大学数学・哲学・経済学学士) ラッセル・ホワイトヘッド理論の簡易化で有名である。また，ラムゼイ・グラフを考案した。

ヤン・ティンバーゲン(Jan Tinbergen: 1903－1994, オランダの経済学者，物理学学士・物理学・経済学博士，オランダ経済大学(現エラスムス・ロッテルダム大学開発計画学教授)，国連開発計画委員会委員長(1966－1975)，経済過程の分析に対する動学的モデルの発展と応用により 1969 年ノーベル経済学賞を受賞した。また，計量経済学や蜘蛛の巣理論に貢献した。さらに，景気循環のマクロ計量経済的モデルを構築した，1937 年“An Econometric Approach to Business Cycle Problems”（景気循環の諸問題に対する計量経済学的アプローチ），1939 年“Statistical Testing of Business Cycle Theories”（景気循環論の統計的検証），ユリシーズ・リッツ等とともに蜘蛛の巣理論を発表し、経済動学理論の幕開けの役割を果たした。

R.G.D.アレン（Sir Roy George Douglas Allen: 1906－1983, 数学博士，L.S.E.教授）は，1938 年に“Mathematical Analysis for Economists” 1949 年に“Statistics for Economists”，を著し 1967 年には，名著“Macroeconomic Theory”，さらに 1980 年に “Introduction to National Accounts Statistics”を著して数理経済学の発展に大きく寄与した。

チャリング・クープマンズ (Tjalling Charles Koopmans : 1910－1985, オランダの経済学者，1940 年渡米，ユトレヒト大学数学・理論物理学学士・修士・博士，エール大学名誉教授) 1975 年に資源の最適配分に関する理論への貢献によりノーベル経済学賞を受賞した。また，線形計画法，計量経済学，並びに外生成長モデルの分野でも貢献した。

モーリス・アレ(Maurice Allais: 1911－2010, フランスの経済学者・物理学者)は，市場と資源の効率的な利用に関する理論の先駆的な貢献により，1988 年ノーベル経済学賞を受賞した。また，重複世代モデルや最適成長の黄金ルールの発展に大きく寄与した。彼はパリ大学統計研究所経済学教授を務めたが，正式な経済学の教育は受けておらず高等師範鉦山学校の卒業であった。

レオニード・カントロヴィチ(Vitaliyevich Kantorovich : 1912－1986, ロシアの数学者・経済学者，数学士，レニングラード大学教授)は，資源の最適配分に関する理論への貢献により，1975 年にノーベル経済学賞した。また，近似理論，変分法や偏微分方程式の経済学への応用にも多大な貢献をした。

ウィリアム・ヴィッカリー (William

Spencer Vickrey: 1914–1996, エール大学数学学士・コロンビア大学経済学修士・博士, コロンビア大学教授) は, 情報の非対称性のもとでの経済的誘因の理論の構築により, 1996 年ノーベル経済学賞を受賞した。

ハーバート・サイモン (Herbert Alexander Simon: 1916–2001, アメリカの政治学者・認知心理学者・経営学者・情報科学者, 政治学博士, カーネギーメロン大学教授) は, 心理学, 人工知能, 経営学, 組織論, 言語学, 社会学, 政治学, 経済学, システム科学等多くの分野に貢献した。経済組織内部での意思決定プロセスにおける先駆的な研究で, 1978 年にノーベル経済学賞を受賞した。

ジョン・ハーサニ (John Charles Harsanyi: 1920–2000, ハンガリー生まれのゲーム理論学者・経済学者, ブタペスト大学薬学学士・哲学博士, シドニー大学経済学修士, スタンフォード大学経済学博士, カリフォルニア大学バークレー校教授) は, 非協力ゲームの均衡の分析に関する理論の開拓により, 1994 年にノーベル経済学賞を受賞した。

ロイド・シャープレー (Lloyd Stowell Shapley: 1923–, 経済学者・数学者, 数科学士, 数学博士, カリフォルニア大学ロサンゼルス校(UCLA)名誉教授) は, 安定配分理論と市場設計の実践に関する研究で, 2012 年にノーベル経済学賞を受賞した。また, ゲーム理論の経済学への応用にも貢献した。

ロバート・ソロー(Robert Merton Solow: 1924–, MIT 教授) は, 1987 年に経済成長理論への貢献によりノーベル経済学賞を受賞

した。R. ドーフマン、P.A.サミュエルソンと共著「線型計画と経済分析 (1・2)」, 安井琢磨・福岡正夫・渡部経彦・小山昭雄共訳, 1958 年, M・フリードマン, N・カルドアと共著)「インフレーションと金融政策」, 新飯田宏訳, 1972 年。

バーノン・スミス(Vernon Lomax Smith: 1927–, 実験経済学・資本理論, 2002 年ノーベル経済学賞, 経済理論が想定する環境を実験室の中に再現し, 人間を被験者としてデータ収集・理論の検証を行う実験経済学の確立, 1991 年 “Papers in Experimental Economics” (Cambridge University Press), アスペルガー症候群, カリフォルニア工科大学電気工学学士・カンザス大学経済学修士・ハーバート大学経済学博士, MIT・カリフォルニア工科大学・アリゾナ大学・チャプマン大学経済学教授)

ラインハルト・ゼルテン (Reinhard Selten: 1930–, ドイツの数学者・経済学者, フランクフルト大学数科学士・修士・博士, ボン大学名誉教授) は非協力ゲームの均衡の分析に関する理論の開拓により, 1994 年にノーベル経済学賞を受賞した。また, ゲームの理論および実験経済学にも貢献した。

ロバート・ジョン・オーマン(Robert John Aumann: 1930–, 数学者・経済学者, M.I.T.数学修士・博士, ヘブライ大学合理性研究所教授)は, ゲームの理論の分析を通じて対立と協力の理解を深めた功績により, 2005 年にノーベル経済学賞を受賞した。ゲーム理論の分析を冷戦下の安全保障に応用した。

アマルティア・セン(Amartya Sen: 1933–, インドの経済学者, ケンブリッジ大学

経済学修士・博士，ケンブリッジ大学・ハーバート大学教授)は，1998 年に高度な数学と論理学を使い厚生経済学や社会選択理論への貢献によりノーベル賞を受賞した。

ダニエル・カーネマン(Daniel Kahneman : 1934ー，イスラエル生まれのアメリカの心理学者・行動経済学者，ヘブライ大学数学・心理学学士，カリフォルニア大学バークレー校心理学博士，ヘブライ大学・カリフォルニア大学バークレー校・プリンストン大学教授)は，プロスペクト理論で有名であり，行動経済学と実験経済学という新研究分野の開拓への貢献により 2002 年ノーベル経済学賞を受賞した。

“Heuristics and biases: The psychology of intuitive judgment”

クライブ・グレンジャー(Clive William John Granger: 1934-2009, ウェールズ出身の統計学者・経済学者，2003 年ノーベル経済学賞，コインテグレーションによる経済の時系列分析手法の確立時系列分析手法，1960 年畠中道雄大阪大学名誉教授(時系列分析)とプリンストン大学でフーリエ解析の共同プロジェクト，1964 年畠中教授と共著で“Spectral Analysis of Economic Time Series”を出版，ノッティンガム大学数学学士・統計学博士，カリフォルニア大学サンディエゴ校名誉教授)

ジェームズ・マーリーズ(Sir James Alexander “Jim” Mirrlees: 1936ー，スコットランドの経済学者，数学・経済学学士・修士，オックスフォード大学・ケンブリッジ大学名誉教授)情報の非対称性のもとの経済的誘因の理論により，1996 年ノーベル経済学賞を受賞した。

エドワード・プレスコット(Edward

Christian Prescott:1940ー，アメリカの経済学者，2000 年ノーベル経済学賞，動的マクロ経済学への経済政策の時間的整合性及び、ビジネスサイクルの背後にある推進力の研究に貢献，数学学士，ミネアポリス連邦準備銀行兼アリゾナ州立大学商学部教授)

ピーター・ダイヤモンド(Peter Arthur Diamond: 1940ー，コーネル大学数学学士・MIT 経済学博士，MIT 教授)は，社会保障論，行動経済学，並びにサーチ理論が専門であり，労働経済におけるサーチ理論に関する研究で 2010 年にノーベル経済学賞を受賞した。1974 年 “Equilibrium Search and Unemployment”(with R.E. Lucas, JET).

ロバート・エングル(Robert Fry Engle III, 1942ー，計量経済学，ARCH モデル，2003 年ノーベル経済学賞，コインテグレーションによる経済の時系列分析手法の確立時系列分析手法，2002 年 “Dynamic Conditional Correlation - A Simple Class of Multivariate GARCH Models” (Journal of Business and Economic Statistics)，ウィリアムズ大学物理学学士・コーネル大学物理学修士・経済学博士，MIT・カリフォルニア大学サンディエゴ校名誉教授)

クリストファー・シムズ(Christopher Albert Sims : 1942ー，計量経済学・マクロ経済学，2011 年ノーベル経済学賞，時系列分析，ハーバート大学数学学士・経済学博士，ミネソタ大学・ハーバート大学・エール大学・プリンストン大学・ミネソタ大学経済学教授)

フィン・キドランド(Finn Erling Kyd-

land : 1943ー, ノルウェーの経済学者, 理学士, 経済学博士, カリフォルニア大学サンタバーバラ校教授)は, 動学的マクロ経済学への貢献(経済政策における動学的不整合性の指摘とリアルビジネスサイクル理論の開拓により, 2004 年にノーベル経済学賞を受賞した。

マイケル・スペンス(Andrew Michael Spence: 1943ー, プリンストン大学哲学学士・オックスフォード大学数学修士・ハーバート大学経済学博士, スタンフォード大学・ハーバート大学教授)シグナリング理論および契約理論が専門で, 情報の非対称性を伴った市場の分析により 2001 年ノーベル経済学賞を受賞した。1991 年 “Papers in Experimental Economics” (Cambridge University Press)。

エリック・マスキン(Eric Stark Maskin: 1950ー, 数学学士・応用数学修士・博士, MIT・プリンストン大学・ハーバート大学教授)は, メカニズムデザイン理論の基礎の確立により, 2007 年にノーベル経済学賞を受賞した。また, ゲーム理論にも多大な貢献をした。1986 年に “The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information” (Econometrica), また 1999 年に “Nash Equilibrium and Welfare Optimality ” (Review of Economic Studies)を著した。

ロジャー・マイヤーソン(Roger Bruce Myerson: 1951ー, 応用数学修士・博士, ノースウェスタン大学・シカゴ大学教授)は, メカニズムデザイン理論の基礎の確立により, 2007 年にノーベル経済学賞を受賞した。また, 最適オークション理論でも有名であ

る。"Graphs and Cooperation in Games," (Mathematics of Operations Research), 1984 年 "Two-Person Bargaining Problems with Incomplete Information," (Econometrica) ,

アルヴィン・ロス(Alvin Elliot Roth: 1951ー, 数学士・修士・博士 (OR), ハーバート大学・スタンフォード大学教授) 専門分野はゲームの理論, 実験経済学, 並びにマッチング理論。安定配分理論と市場設計の実践に関する研究で, 2012 年にノーベル経済学賞を受賞した。

第4章：経済学における数学応用の実例

本章では, 例を挙げて数学がいかに経済学において応用されているかを示す。

a) 等比数列(財政政策の乗数効果)

乗数効果(Multiplier Effect)とは, 財政拡張政策(公共投資増額・減税)により有効需要を増加させたときに, 国民所得は財政支出等の増加額より大きく増大する現象である。国民所得の拡大額÷有効需要の増加額を乗数という。マクロ経済学上の用語である。リチャード・カーン(Richard F. Kahn: 1905-1989, イギリスの経済学者, ケンブリッジ大学物理学士・経済学学士, ケンブリッジ大学教授)が考案した。

各家計の可処分所得が 1 単位(例えば 1 万円)増加したとき, 平均してその割合 β を消費し, $1-\beta$ を貯蓄に回すとする。 $(0 \leq \beta \leq 1, \beta = \text{限界消費性向}, 1-\beta = \text{限界貯蓄性向})$ ところで, 企業や政府の投資により, 家計の可処分所得の合計値が X 円増加したとすると, 家計はそのうち βX 円だけ消費に回す。この βX 円は企業の収入となり, それは給料として再び各家計に入る。すると家計

はこの βX 円の β 割にあたる $\beta^2 X$ 円を消費に回す。この $\beta^2 X$ 円は企業経由で再び家計に入り、家計はその β 割にあたる $\beta^3 X$ 円を消費に回す。以下、これが繰り返されるので、最終的に総消費は、以下の額だけ増加する。

$$X + \beta X + \beta^2 X + \beta^3 X + \cdots = \frac{X}{1 - \beta}$$

すなわち、最初に行われた投資 X の $1/(1-\beta)$ 倍分だけ消費が拡大することになる。

例えば $\beta=0.9$ であれば、 $1/(1-\beta)=10$ 倍も消費が拡大する。この $1/(1-\beta)$ のことを乗数といい、さらに、 $1/(1-\beta)$ 倍消費が増加する現象のことを乗数効果という。なお、最初に投資された X 円は、上述した乗数効果のサイクルのどこかの段階で家計の貯蓄となり、 X 円全てが貯蓄に回った段階でサイクルは終了する。従って消費が乗数倍されるのに対し、最終的な家計の貯蓄は投資額と同じ X 円である。

別の計算方法：

乗数効果を異なる視点から導く事もできる。

今外国との輸出入がないとすれば、一国全体の総消費 Y は家計の支出 C と政府の支出 G と企業の投資支出 I の総和になる(所得恒等式)：

$$Y = C + G + I$$

消費された金額 Y は利益として企業に入り、そして給料の形で家計へと戻ってくる。すなわち、総消費 Y は家計の所得の合計値に等しい。限界消費性向 β の定義より、家計は所得 Y うち割合 β を支出する。すなわち、

$$C = \beta Y$$

以上の式を整理すると、

$$Y = \frac{1}{1 - \beta}(G + I)$$

従って、政府ないし企業が支出を増加させることで $G+I$ が X だけ上昇すれば、

Y は $\frac{X}{1 - \beta}$ だけ上昇することになる。すなわち、最初に行われた投資 X の $1/(1-\beta)$ 倍分だけ消費が拡大する。

b) 対数微分(貨幣数量説：ケンブリッジ方程式)

貨幣数量説(Quantity Theory of Money)とは、社会に流通している貨幣の総量とその流通速度が物価の水準を決定しているという経済学の仮説である。物価の安定には貨幣の流通量の監視・管理が重要であると、政府・中央銀行による通貨管理政策の重要な理論背景となっている。

まずケンブリッジ方程式は以下のように定義されている。

$$M = kPy$$

M =貨幣の供給量, k =マーシャルの k (貨幣の Velocity:定数), P =価格, y =実質 GDP. ケンブリッジ方程式の両辺の自然対数をとると、

$$\log M = \log k + \log P + \log y$$

次に、両辺を全微分すると、

$$dM/M = dP/P + dy/y \quad dP/P = dy/y - dM/M$$

ここで、 dP/P =インフレーション率, dy/y =実質 GDP(国内総生産)の成長率、並びに dM/M =貨幣の供給量の増加率である。したがって、ケンブリッジ方程式は、もし政府がインフレーション率を 0%にしたいのであれば、実質 GDP の成長率=貨幣の供給量の増加率を維持すれば、その目標を達成できることを示している。

ところで、実際の統計値から貨幣量と物

価の相関関係を分析するためのツールとしてアーヴィング・フィッシャー(Irving Fisher:1867-1947, アメリカの数理経済学者, 貨幣数量説, フィリップス曲線・無差別曲線への貢献, 1892 年“Mathematical Investigations in the Theory of Value and Prices” (価値と価格の理論の数学的研究), 1911 年 “The Purchasing Power of Money” (貨幣の購買力), エール大学数学学士・経済学博士, エール大学教授)の「交換方程式」がある。これは貨幣量と物価の関係を、貨幣の“Velocity 流通速度”という概念を導入したものである。貨幣数量説の代表的な考えである。

$MV=PQ$

M =ある期間中の任意の時点 t における貨幣の流通量

V =貨幣の“Velocity 流通速度”(特定期間内に人々のあいだで受け渡しされる回数: 貨幣の回転率とも呼ばれる)

P =ある期間中の任意の時点 t における物価水準 (通常は基準年度を 1 としたデフレータ)

Q =取引量(特定期間内に人々のあいだで行われる取引量(quantity)の合計)

上の式で, PQ は国内総生産であり, 両辺を微分するとケンブリッジ方程式と同じ結果になる。

c) ゲームの理論 (ナッシュ理論)

ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) は, ゲームの理論における非協力ゲームの解の一種であり, いくつかの解の概念の中で最も基本的な概念である。数学者・経済学者のジョン・フォーブス・ナッシュ(資料Ⅱ参照)にちなんで名付けられた。

ナッシュ均衡は, 他のプレーヤーの戦略を所与とした場合, どのプレーヤーも自分の戦略を変更することによってより高い利得を得ることができない戦略の組み合わせである。ナッシュ均衡の下では, どのプレーヤーも戦略を変更する誘因を持たない。ところで, ナッシュ均衡は必ずしもパレート効率的ではない。その代表例が囚人のジレンマである。

形式的な定義は次の通りである。標準型ゲーム $G = (N, S, u)$ (N はプレーヤーの集合, $S = \prod_{i \in N} S_i$ は戦略の組の集合, $u = (u_i)_{i \in N}$ ($u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$) は効用の組)において, 戦略の組 $s^* \in S$ がナッシュ均衡であるとは, 全てのプレーヤー $i \in N$ と, 全ての $s_i \in S_i$ に対して, $u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ を満たすことである。ただし, s_{-i} は, i 以外のプレーヤーの戦略の組をさす。

浜田 宏一(Hamada Koichi: 1936-, 国際経済学, ゲーム理論, 東京大学法学士・経済学博士, エール大学経済学博士, 東京大学教授・エール大学教授)は, ゲーム理論を国際貿易論に応用し, 貿易戦争で 3 か国の Reaction Function で囲まれた領域にナッシュ均衡があること証明した。

d) 線形計画法 (ターンパイクモデル)

A 地点から B 地点に行くのに, 直接行くのではなく, 高速道路(ターンパイク)に乗って C 地点までノンストップで行き, そこで高速道路を下りて目的地点 B に向かった方が, 距離は長くても早く着くように, 経済成長も, 経済成長最大の経済成長路線(ノイマン型均衡成長)をたどった上で, 目標の近くでこの路線から離れるのが最も効率が良いというサミュエルソンの証明。この成

長理論は、資源制約がなく、体系外に生産物が流出することなく、全ての生産物が体系内で消費されるという閉鎖体系モデルである。森嶋通夫たちは、労働供給の成長率を制約条件にし、最終目的を種々与えて成長率路線を考えた。こうした考えは 1950 年代後半から 60 年代、アメリカ、日本などで成長が続いたときに盛んであった。現実政策としては、日本経済のように、高い経済成長率を続け、その成果の上に福祉政策を実現するほうが、初めから福祉政策と成長とを考えるよりも効率的であるというものであるが、経済は非可逆的で、高い成長率のもとで、地価が上がりすぎるなど歪みが生じ、非可逆性を前提としないターンパイク定理のようにはいかない。中国の鄧小平の考え、改革・開放政策も一種のターンパイクで、成長が同時に不平等の増大をもたらしている。ターンパイクモデルの文献として次のものが有名である。

R. Dorfman, P.A. Samuelson, R. M. Solow, “Linear Programming and Economic Analysis”.

M. Morishima, “Equilibrium, Stability and Growth: A Multisectoral Analysis”.

e) 不動点の定理

ブラウワーの不動点定理、交換経済における均衡の存在、宇沢の定理、企業の生産を含む経済の均衡並びにナッシュ均衡については、資料 I : “ブラウワーの不動点定理・交換経済における均衡の存在・宇沢の理・企業の生産を含む経済の均衡について・ナッシュ均衡について”を参照のこと。

第5章:経済学における数学の応用の実例

本章では、数学がいかに経済分析に用いられ、企業の経営に応用されているかを実例を挙げて説明する。

a) 予測(回帰分析) (Regression Analysis)

回帰分析は、従属変数（被説明変数・目的変数）と独立変数（説明変数）の間に式を当てはめ、従属変数が独立変数によってどれくらい説明できるのかを定量的に分析することである。

経済学の例を挙げると、経済全体の消費(C)を国民所得(Y)で説明する消費関数が $C=a+cY$ という形で表されるとする。この例では、消費が従属変数、国民所得が説明変数である。説明変数が 1 つならば単回帰分析、2 つ以上ならば重回帰分析と呼ぶ。回帰分析で用いられる代表的な推計方法は、最小二乗法である。

実例：Taco Bell 社(人件費節約問題)

経営問題:Taco Bell 社は、世界中に 6,500 店舗を構え、年間の売上が約 4,200 億円のファースト・フードの企業である。ところが、売上の約 30%が人件費である。他の産業と違い、在庫を抱えることができず、注文が入ってから調理するので、従業員数がどうしても多くなってしまう。例えば、総売上の 52%は 11 : 00 から 2 : 00 までのランチタイムに売上げる。短時間で顧客に商品を提供するのが、ファースト・フード企業の至上命令なので、従業員をどの時間帯に何人配置するかが売上げに大きな影響を与えてしまう。

解決策:Taco Bell 社は効果的な人事管理システムを考案することにした。そのためには、1 週間 7 日間を 15 分単位に細分し、その時間帯に何人の顧客が来て、何を注文

するか予測が必要になった。予測モデルを考案し、人事管理システムを完成させた。

結果：1993年から1996年までの4年間で、人件費を約40億円削減することができた。

出典：J. Hueter and W. Swart, “An Integrated Labor-Management System for Taco Bell,” *Interfaces* 28, no.1 (January-February 1998), pp. 75-91.

b) 線形計画法

経営問題：ケロッグ社は世界最大のコーンフレークの企業であり、年間の売上高は約6,300億円である。1906年に会社を創立した当時は、コーンフレークのみを生産していたが、その後様々な商品を開発し、現在では、約80種類の製品を生産し、米国とカナダに5つの工場、7カ所の配送（流通）センター、15の生産下請け企業を有するようになった。

解決策：ケロッグ社は、煩雑な生産や流通の問題に対処するために、大型の線形計画モデル、KPSモデル(Kellogg Planning System)を開発した。また、12ヶ月から24ヶ月の長期計画のための線形計画モデルも考案した。

結果：この線形計画モデルにより、生産、在庫、流通の費用を1995年度単年度で、約4億円、1995年から5年間で総計約36億円を節約することができた。

出典：G. Brown, J. Keegan, B. Vigus, and K. Wood, “The Kellogg Company Optimizes Production, Inventory, and Distribution,” *Interfaces* 31, no.6 (November-December 2001), pp. 1-15.

c) プロジェクト管理

経営問題：2002年の冬季オリンピックは、費用が1,700億円の5年計画のプロジェクトで実施されることとなった。Salt Lake Organizing Committee (SLOC) は、78のスポーツイベント開催、57のオリンピック委員会の業務、37,000プロジェクト、並びに22の開催施設の建設等を一括して計画しなければならなかった。また、3,780社への900億円の発注業務、さらに約7,000件の品目を購入しなければならなかった。

解決策：Salt Lake Organizing Committee (SLOC) は、“Primavera プロジェクト管理ソフトシステム”を使用して、上の複雑なプロジェクトの管理を行った。

結果：当初は360億円の赤字が予測されていたが、プロジェクト管理の手法を用いることにより、90億円の黒字にすることができた。

出典：R. Foti, “The Best Winter Olympics, Period,” *PM Network* 18, no.1 (January 2004), pp. 22-28.

d) 待ち行列

経営問題：Bank of America 社の調査によると、顧客は3分の待ち時間を境に、実際の待ち時間と顧客が感じる待ち時間の間に大きな差異があることが判明した。例えば、窓口で2分間待っている人は、多くの人が2分間程度待っていると感じていて、実際の待ち時間との差異はないが、5分間待っている多くの顧客は10分間程度待っているように感じ、銀行に対する不満が高まり、他の銀行へ預金を移す顧客も出てくることが判明した。

解決策：Bank of America 社は、実験的に窓口の上と待合室にテレビを置き、CNN

ニュースを流した。この実験により、実際の待ち時間と顧客が感じる待ち時間の差を調べた。待ち時間が実際の時間より長いと感じる人は、32%から15%に減少した。

結果:テレビを主要な支店に設置することにより、約1万人の顧客がいる支店で年間の利益が740万円増加することになった。この規模の支店でのテレビの設置にかかった費用は、90万円であった。

出典: S. Thomke, "R&D Comes to Services: Bank of America's Pathbreaking Experiments," Harvard Business Review 81, (April 4, 2003) pp. 70-9.

第6章: 結び

前章までに数学がいかに現代の経済学に応用され、経済学の理論の発展および企業経営に寄与してきたかを学んだ。数学の知識なくしては、現代の経済学を学び発展させることや現代企業の効率的な経営は極めて困難であることが理解できたと考える。経済学は工学以上に数学の応用学問分野であると言っても過言ではない。数理経済学や計量経済学の専門家だけでなく、今後経済学を真摯に学ぼうとする学生には、微分・積分学は言うに及ばず、微分方程式や位相数学の知識も必要になることは明白である。

本論文にも森嶋道夫、宇沢弘文、並びに浜田宏一等の著名な日本人の経済学者が登場したが、残念なことに日本人でノーベル経済学賞を受賞した経済学者は現時点で一名もいない。著者はコロンビア大学大学院に在学中に三名のノーベル経済学賞受賞者に師事した。一大学の一学部三名のノー

ベル経済学賞受賞者がいることは日本では考えられないことである。ところで、日本の大学では、経済学部は基本的に文系学部と看做されている。数学は殆どの私立大学経済学部で受験科目としてなく、国立大学経済学部においても文系の数学しか必要とされていない。このような現状にある限り、日本は経済大国であるにもかかわらず、経済学小国に甘んじなければならないと考える。

また、ポール・クルーグマンに代表される海外の著名な経済学者や国際学会での業績が皆無の日本政府の御用経済学者の意見を批判なしでほぼ100%信用する限り、日本の経済および経済学の進歩はないのではないかと危惧する。

ところで、日本人は数学が得意であると言われてきたが、団体順位が付けられるようになった1995年以来「国際数学オリンピック」で5位以内の上位入賞は2009年の団体第2位だけである。この主な理由は、高等学校の単元から「初等幾何」と「組み合わせ」を割愛しているからだと言われるが、ここにも日本における数学軽視が窺える。

日本が今後進むべき道は明白である。日本における経済の繁栄・経済学の進歩、並びに企業経営の成功は、高校までの数学教育と大学における経済学や経営学の教育における数学の重視に大きく関わっていると言える。微分・積分学は言うに及ばず、微分方程式や位相数学の知識無くしては、現代の高度な経済学あるいは経営の手法は理解できない。日本が一日も早く、経済学および経営学において数学を重視することを強く望む。

註

¹ ノーベル経済学賞＝アルフレッド・ノーベル記念経済学スウェーデン国立銀行賞 (The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel)

² 数理経済学の参考書として推薦する書籍は、宇沢弘文著「経済解析」(基礎篇・展開篇)(岩波書店、1990年・2003年)である。本書の基礎篇の「数学付論」には、関数と位相、凸性、微分方程式、ポントリヤーギンの最大原理等、本書を理解するのに必要な数学の知識が分かり易く説明してある。また、本書の展開篇では、数学が経済学にどのように応用されているかが良く理解できる。最近の数理経済学に関しては、Journal of Mathematical Economics 等の掲載論文を参照せよ。

³ ノーベル経済学賞＝アルフレッド・ノーベル記念経済学スウェーデン国立銀行賞 (The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences in Memory of Alfred Nobel)。

参考文献

1. Foti, R. (2004) "The Best Winter Olympics, Period," PM Network 18, no.1 (January), pp. 22-28.
2. Aoki, Masanao. (2002) *Modeling Aggregate Behavior and Fluctuations in Economics: Stochastic Views of Interacting Agents*. Cambridge University Press.
3. Davidson, Paul. (1991) *Controversies in Post Keynesian Economics*. Edward Elgar Publishing Limited.
4. Friedman, Milton. and Walter W. Heller. (1969) *Monetary vs. Fiscal Policy*. W. W. Norton & Company.
5. Fujita, Masahisa. Paul Krugman and Anthony J. Venables. (1999) *The Spatial Economy: Cities, Regions, and International Trade*. The MIT Press.
6. Ibid. (1997) *Development, Geography, and Economic Theory*. The MIT Press.
7. Ibid. (2012) *End This Depression Now!* W.W. Norton & Company, Inc.
8. Ibid. (2000) *The Return of Depression Economics*. W. W. Norton & Company.
9. Ibid. (1991) *Geography and Trade*. The MIT Press.
10. Ibid. (2003) *The Great Unraveling: Losing Our Way in the New Century*. W. W. Norton & Company.
11. Ibid. (1995) *Trade with Japan: Has the Door Opened Wider?* The University of Chicago Press.
12. Ibid. (1995) *Trade with Japan: Has the Door Opened Wider?* The University of Chicago Press.
13. Ibid. (1998) *Development, Geography and Economic Theory*. The MIT Press.
14. Heilbroner, Robert. and Lester Thurow. (1998) *Economics Explained*. Touchstone, New York.
15. Morishima, Michio. (1996) *Dynamic Economic Theory*. Cambridge University Press.
16. Mundell, Robert A. (1971) *Monetary Theory: Inflation, Interest, and Growth in the World Economy*. Goodyear Publishing Company, Inc.

16. Phelps, Edmund S. (1965) *Private Wants and Public Needs: An Introduction to a Current Issue of Public Policy*. W. W. Norton & Company, Inc.
17. Ibid. (1990) *Seven Schools of Macroeconomic Thought*. Oxford University Press.
18. Ibid. et. al. (1970) *Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory*. W. W. Norton & Company, Inc.
19. Pence, Gregory E. ed. (1995) *Classic Works in Medical Ethics: Core Philosophical Readings*. McGraw Hill.
20. Ibid. (Forthcoming) *Re-Creating Medicine: Ethical Issues at the Frontiers of Medicine*. Rowman & Littlefield.
21. Rawls, John. (1971) *A Theory of Justice*. Harvard University Press.
22. Ibid. (1993) *Political Liberalism*. Columbia University Press.
23. Sargent, Thomas J. (1987) *Dynamic Macroeconomic Theory*. (1979) *Macroeconomic Theory: Economic Theory, Econometrics, and Mathematical Economics*. Academic Press.
24. Schumpeter, Joseph. (2006) *Essays on Entrepreneurs, Innovations, Business Cycles, and the Evolution of Capitalism*. Transaction Publishers.
25. Stiglitz, Joseph. (2002) *Globalization and Its Discontents*. Penguin Books.
26. Takagi, Ichiro. (1991) “Dynamic Stochastic Programming in Macro-Econometric Model: Time Consistency Problem and Rational Expectation Hypothesis,” *Memoirs of Faculty of General Education, Kyushu Tokai University*, Vol.3, pp.63-84.

資料Ⅰ：“ブラウワーの不動点定理・交換経済における均衡の存在・宇沢の定理・企業の生産を含む経済の均衡(ナッシュ均衡)について” (同志社大学経済学部田中靖人氏の論文からの抜粋)

ブラウワーの不動点定理

スペルナーの補題を用いて次の定理を得る。この定理の証明は2次元の場合も一般的な場合もほとんど同じである。一般の場合がわかりにくければ0を x , 1を y , 2を z として3財のケースに直して考えていただきたい。次の交換経済の均衡の証明も同様である。

定理1 (ブラウワー(Brouwer)の不動点定理). Δ から Δ' への連続な写像 f は不動点を持つ。

証明 Δ を何回か (m 回) 分割してできた単体の頂点の座標を $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ で表す。

$x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n$ かつ $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ である。この $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ が f によって $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとしよう。もちろん $x_0 + x_1 + \dots + x'_n = 1$ である。各頂点に次のようにして番号をつける。

(1) $x_0 < x'_0$ ならば $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に番号0をつける.

(2) $x_0 \geq x'_0$, かつ $x_1 < x'_1$ ならば $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に番号1をつける.

(3) $x_0 \geq x'_0$, $x_1 \geq x'_1$, かつ $x_2 < x'_2$ ならば $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に番号2をつける.

(4) 以下同様で, 一般的には $x'_i < x_i$ となる最小の i ($i = 0, 1, \dots, n$) の番号をつける.

もしどの番号もつかない点があるとする. とすべての i ($i = 0, 1, \dots, n$) について $x'_i \geq x_i$ であるが, $x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1$ かつ $x'_0 + x'_1 + \dots + x'_n = 1$ であるからすべての i ($i = 0, 1, \dots, n$) について $x'_i = x_i$ でなければならず, その点是不動点となる. そうであれば証明は終わりなのですべての点に番号がつくものとして議論を進める.

まず Δ の頂点の対応を考える.

(1) $(1, 0, 0, \dots, 0)$ が $(x_0, x_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする. もし $x'_0 = 1$ ならばこの点是不動点となる. したがって $x'_0 < 1$ が成り立つので $(1, 0, 0, \dots, 0)$ の番号は0である.

(2) $(0, 1, 0, \dots, 0)$ が $(x_0, x_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする. もし $x_1 = 1$ ならばこの点是不動点となる. $x_0 \geq x'_0$ かつ $x_1 < 1$ が成り立つので $(0, 1, 0, \dots, 0)$ の番号は1である.

(3) $(0, 0, 1, \dots, 0)$ が $(x_0, x_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする. もし $x'_2 = 1$ ならばこの点是不動点となる. $x'_0 \geq x_0$, $x'_1 \geq x_1$ かつ $x'_2 < 1$ が成り立つので $(0, 0, 1, \dots, 0)$ の番号は2である.

(4) 以下同様.

次に $x_n = 0$ であるような $n-1$ 個の点から構成される Δ の $n-1$ 次元面である $n-1$

次元多面体 ($n=3$ ならば三角形) を考え, それに含まれる点 $(x_0, x_1, \dots, 0)$ が

$(x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする. $x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ とはならないから番号 n はつかず, $(x_0, x_1, \dots, 0)$ の番号は0 から $n-1$ までのいずれかである. 同様にして

$(x_0, x_1, \dots, 0, x_n)$ の番号は $n-1$ を除くいずれか, $(0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ の番号は0を除くいずれか, 以下同様であることが示される.

次に $x_{n-1} = x_n = 0$ であるような点から構成される Δ に含まれる $n-2$ 次元多面体 ($n=3$ ならば辺) を考えそれに含まれる点 $(x_0, x_1, \dots, 0, 0)$ が $(x_0, x_1, \dots, x'_{n-1}, x'_n)$ に対応すると, $x_{n-1} = x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ あるいは $x'_{n-1} < x_{n-1}$ とはならないから番号 $n, n-1$ はつかず, 0 から $n-2$ までのいずれかの番号がつく. これら以外の点 (Δ の内部の点) には0 から n までのいずれかの番号がつく. この番号のつけ方はスペルナーの補題の前提となっている番号づけと同じであるから0 から n までのすべての番号づけを持った n 次元単体が存在する (複数あるかもしれないがその内の1つをとる). そのような n 次元単体の頂点を $(x^m; 00, x^m; 01, \dots, x^m; 0n), (x^m; 10, x^m; 11, \dots, x^m; 1n), \dots, (x^m; n0, x^m; n1, \dots, x^m; nn)$ とする (m は Δ の分割の回数).

それぞれ $0, 1, \dots, n$ の番号がついている. 1 から始まる m の値のそれぞれに上記の n 次元単体が存在する. したがって0 から n までの各頂点について m の値に対応した点列ができる. Δ は範囲の決まった (有界な) 領域であり, m の値は無限に続くか

らそれぞれの点列はある1点に限りなく近づいて行くかまたはある点（複数あるかもしれない）に繰り返し近づいたり遠ざかったりするかどうかである。後者の場合ある点に近づいて行く部分だけを（もとの点列と同じ順に）として新たな（無限の）点列とし、前者の場合には上記の点列そのものをとる。 m の値を大きくして行く、すなわちこのような分割を繰り返して行くと分割してできる一つ一つの単体は小さくなって行き、分割を際限なく続ければ各単体は1点に近づいて行く。したがって m が十分に大きくなれば上記の $n+1$ 個の点は同一のある点 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に収束する（点列がある極限に収束するとは限りなく近づいて行くということ）。これが不動点であることを示す。 f によって $i=0, 1, \dots, n$ について $(x_{m;i0}, x_{m;i1}, \dots, x_{m;in})$ が $(x_{m;i0}, x'_{m;i1}, \dots, x_{m;in})$ に対応し、 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ が $(x_0, x'_1, \dots, x'_n)$ に対応するとする。 $(x_{m;00}, x_{m;01}, \dots, x_{m;0n})$ の番号は0であるから $x_{m;00} < x_{m;00}$ である。 f は連続なので m を十分に大きくすれば $(x_{m;i0}, x_{m;i1}, \dots, x_{m;in})$ と $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ がごく近くにあるとき $(x_{m;i0}, x_{m;i1}, \dots, x_{m;in})$ と $(x_0, x'_1, \dots, x'_n)$ もごく近くになるようにすることができる。したがって $x_0 \leq x_0$ が成り立つ。

[注] $(x_{m;i0}, x_{m;i1}, \dots, x_{m;in})$ が $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ に接近して行く過程においては常に

$x_{m;00} < x_{m;00}$ であるが、極限においては等号 $(x_0 = x_0)$ が成り立つ可能性がある。

同様にして $x'_1 \leq x_1, \dots, x'_n \leq x_n$ を得る。一方 $x_0 + x_1 + \dots + x_n = x_0 + x_1 + \dots + x'_n = 1$ であるから $(x_0, x_1, \dots, x_n) =$

$(x_0, x_1, \dots, x'_n)$ となり、 $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ は不動点である。

交換経済における均衡の存在

定理1 を用いて次の結果を証明する。

定理2 (交換経済における均衡の存在). $n+1$ 個の財 $X_0, X_1, \dots, X_n$ からなる交換経済において各消費者（消費者の数は有限である）の需要が価格について連続であるとする（価格のわずかな変化に対して需要が大きくは変化しない）。価格（ベクトル）が $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ のときの各財の需要（超過需要）を $f_i(p_0, p_1, \dots, p_n), i=0, 1, \dots, n$ で表すと次の式が成り立つ。

$p_0 f_0 + p_1 f_1 + \dots + p_n f_n = 0$ （ワルラスの法則）

f_i は X_i 財についての各消費者の需要の合計に等しい。交換経済においては各消費者について各財の需要（超過需要）の金額の合計がゼロに等しくなければならず（予算制約）、それらをすべて足し合わせると上の式が得られる。

このとき、すべての財（ $i=0, 1, \dots, n$ ）について $f_i(p_0, p_1, \dots, p_n) \leq 0$ （超過需要がゼロであるか、または負の超過需要すなわち超過供給が存在する）を満たす均衡価格（ベクトル） $(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n)$ が存在する。

証明. $(p_0, p_1, \dots, p_n)$ から $n+1$ 個の実数の組 $v=(v_0, v_1, \dots, v_n)$ へのある関数を考えそれらが次のように表されるものとする。

$v_i = p_i + f_i, f_i > 0$ のとき $v_i = p_i, f_i \leq 0$ のとき すべての財について同様。この $(v_0, v_1, \dots, v_n)$ をもとに次のような Δ から Δ' への関数 $\varphi=(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を作る。

$\varphi_i(p_0, p_1, \dots, p_n) = v_0 + v_1 + \dots + v_n$
 v_i すべての財について同様. これらについて

$\varphi_i \geq 0, i=0, 1, \dots, n$ かつ $\varphi_0 + \varphi_1 + \dots + \varphi_n = 1$ が成り立つから, $(\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n)$ は Δ' 上の点である. また f_i が連続であるから φ も連続である. したがってブラウワーの不動点定理により

$(\varphi_0(p_0, p_1, \dots, p_n), \varphi_1(p_0, p_1, \dots, p_n), \dots, \varphi_n(p_0, p_1, \dots, p_n)) = (p_0, p_1, \dots, p_n)$

を満たす $(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n)$ が存在する. すべての i について $v_i \geq p_i$ であるから, φ と v の関係によってある $\lambda \geq 1$ に対して, すべての i について $v_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) = \lambda p^*_i$ が成り立つ. 以下では $\lambda = 1$ を示す. $\lambda > 1$ と仮定してみよう. すると, $p^*_i > 0$ であるときには $v_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) > p^*_i$, すなわち $f_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) > 0$ となる (すべての財について同様). 一方, すべての i について $p^*_i \geq 0$ であり, それらの和が 1 であるからいずれかは厳密に正である. そうすると $p^*_0 f_0 + p^*_1 f_1 + \dots + p^*_n f_n > 0$ となりワルラスの法則と矛盾する. したがって $\lambda = 1$ であり $v_0 = p^*_0, v_1 = p^*_1, \dots, v_n = p^*_n$ および

$f_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) \leq 0$ が導かれる.

すべての i について $f_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) \leq 0$ であり, かつ

$p^*_0 f_0 + p^*_1 f_1 + \dots + p^*_n f_n = 0$ であるということは $p^*_i f_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) \leq 0$ (すべての財について) であることを意味するから, $p_i > 0$ のときには $f_i(p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n) = 0$ である. したがって均衡価格においては常に需要がゼロに等しいかあるいは超過供給が存在しており, 正の価格を持つ

財 (普通はそうだが) について需要はゼロでなければならない. 価格がゼロで超過供給が存在する可能性はあるが, それはよほど誰も欲しがらない財が有り余るほどに存在する財である. 価格がゼロなら需要 (超過需要) が正になるとするとすべての財の均衡価格は正である.

v と φ の式を見ると需要が正の (超過需要が存在する) 財の価格が引き上げられてそうでない財の価格が引き下げられるような調整が行われるように見えるが, そういう趣旨ではない. この議論では均衡の安定性までは考えていない. 超過需要が存在するような価格は φ の不動点とはならず, 不動点となる価格においては超過需要が存在しない, というのが φ の不動点が意味するところである.

参考: 需要の連続性についてまず人々の選好の連続性について説明する. 2 財の場合を考

えよう (3 財以上の場合についても同様の議論が可能である). X 財, Y 財の消費量の組として $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ をとり, ある消費者が B より A を (厳密に, つまり無差別ではなく) 好むものとする. そのとき A, B それぞれを含む消費量の組の集合 (境界を含まない開集合) $\bar{A}, \bar{B}$ に含まれるすべての組 A', B' について, この消費者が B' より A' を好むように $\bar{A}, \bar{B}$ がとれるならばこの消費者の選好は連続である. 通常は $\bar{A}, \bar{B}$ としてそれぞれ A, B のごく近く (各財の消費量がわずかしき変わらない) の消費量の組の集合をとる. これは消費者の選好が急に変わらない. あるいは選好に飛びがないということの意味する.

〔注〕説明を繰り返すと、 B より A が好まれるときに B のすぐ近くの消費より A のすぐ近くの消費の方が好まれるということである。 A , B それぞれからある程度離れると互いに無差別な消費の組が現れ、さらに離れると逆転するかもしれないが、無差別になるものよりもさらに A , B に近い消費の組をとれば A に近い方が好まれる。

消費者の選好がこの意味で連続であり、かつ与えられた予算制約式のもとで効用を最大化する需要（消費量の組）がただ一つに決まる（無差別曲線が凸であればそうである）ならば需要は価格について連続であることが言える。連続ではないと仮定してみよう。価格の組（ベクトル）を $\mathbf{p}(= (p_x, p_y))$ として $\mathbf{p}$ の（無限の）列が $\mathbf{p}^*$ に近づいて行き、 $\mathbf{p}$ および $\mathbf{p}^*$ のときの需要が A , A^* であるとする。もし連続でなければ A が A^* に近づいて行かず（需要が連続ならば A^* に近づいて行く）、別の需要 B^* に近づいて行く。

〔注〕 $\mathbf{p}$ の列が $\mathbf{p}^*$ に限りなく近づいて行くときに A が B^* に近づいたり離れたりする場合には B^* に近づいて行く部分だけをとして $\mathbf{p}$ の列と考える。

すべての A において予算制約式が（価格 $\mathbf{p}$ のもとで）成り立つから B^* においても（価格 $\mathbf{p}^*$ のもとで）成り立つ（予算制約式の左辺は一次式であるから連続であり、 $\mathbf{p}^*$ にごく近い価格における需要は B^* にごく近くなっているからである。もちろん A^* においても予算制約式は成り立つ（ A^* は価格が $\mathbf{p}^*$ のときの需要である）。一方、ある価格のもとで消費者が選ぶ需要はただ一つに決まるからこの消費者は B^* より A^* を好む。選好の連続性により A^* , B^* それぞれのごく近くの消費量の組の集合 $\overline{A}$, $\overline{B}$

に含まれる組 A' , B' についても B' より A' を好む。 $\mathbf{p}$ が $\mathbf{p}^*$ に十分に近くなっていればそのときの需要 A は $\overline{B}$ に含まれるからこの消費者は A より A^* を（厳密に）好む。 A^* よりほんの少しだけ消費量が少ない（したがって予算が少し余る）が、やはり A より好まれる消費量の組 C をとると、 C は $\mathbf{p}^*$ にごく近い $\mathbf{p}$ においても予算を少し余らせながら、なおかつ A より好まれる。しかし、価格 $\mathbf{p}$ において消費者が効用を最大化するように A を選んでいたはずだからこれは矛盾である。よって需要は価格について連続でなければならない。

*3 A , B の十分近くの集合をとれば上の条件が成り立つようにできるということである。

*4 ある財の価格がゼロに近づいて行って需要が無限大になる場合、供給（初期保有量の合計、生産を含めても同様）は有限と考えられるのでゼロの価格では均衡にならないから、そのような財の価格は正であると仮定してもよいだろう。一方、価格がゼロに近づいて行って需要がある有限の値に近づいて行く場合は価格ゼロで均衡になる可能性があるが、消費量が増えれば増えるほど効用が大きくなるという経済学の通常の仮定（非飽和性）と矛盾する。しかし一応本稿ではそのような場合も含むものとする。

*5 あるいは予算制約式を満たす需要が B_- にいくらかでも近くなるように価格を（ $\mathbf{p}_-$ のごく近くで）選ぶことができる。

連続ではない選好の例：辞書式順序常識的な選好は連続であるが、連続ではない選好を考えることもできる。その代表的な例が辞書式順序にもとづく選好である。 X 財、

Y 財の消費量の組を (x, y) で表し, $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ について $x_A > x_B$ ならば Y 財の消費量に関係なく A が B より好まれ ($x_A < x_B$ ならば B が A より好まれ), $x_A = x_B$ のときにだけ Y 財の消費量を比べて多いほうが好まれる (Y 財の消費量も等しければ無差別) というような選好が辞書式順序にもとづく選好である. 辞書に単語を並べる順番を決める方法と同じなのでその名がある. この選好は連続ではない. (1,1) は (1,0) より好まれるが, (1,1) を含むどんな開集合をとってもその中には (1,0) より劣る (その点よりも (1,0) の方が好まれる) 点が含まれる ((1,1) を含む開集合には X 財の消費量が 1 より少ない点が含まれる) ので連続性の条件が満たされない. これが連続でないことは直観的に次のようにも説明できる. (1,1) と $(1-x, 2)$ を比べる. x がいくら小さくなくても正である限り (1,1) が好まれる. しかし $x=0$ になると突然 $(1-x, 2) = (1, 2)$ の方が好まれるようになり, (1,1) と無差別になる点はない. したがって選好に飛びが生じる. この場合選好を効用関数で表現したときにも効用の値に飛びが生じ連続ではなくなる.

宇沢の定理

宇沢弘文は次の定理を証明した.

定理. ブラウワーの不動点定理と競争経済の均衡が存在するという定理は同値である.

証明. 前節でブラウワーの不動点定理を用いて競争経済の均衡が存在することを証明したので, その逆を証明すればよい. つまり, 競争経済の均衡の存在がブラウワーの不動点定理を意味することを証明する.

Δ から Δ' への適当な連続関数を $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_n\}$ として以下のように各財の超過需要関数を作る. $p = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ である.

$$Z_i(p) = \psi_i(p) - p_i \mu(p), \quad i = 0, 1, \dots, n \quad (2)$$

$\mu(p)$ は $\mu(p) = \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) / \sum_{i=1}^n p_i$ と定義される. 各 z_i は連続であり, 以下に示すようにワルラスの法則を満たす. (2) にそれぞれ p_i をかけて 0 から n まで加えると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i z_i &= \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) - \mu(p) \sum_{i=1}^n p_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) - \mu(p) \sum_{i=1}^n p_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) - \mu(p) \sum_{i=1}^n p_i^2 = 0 \end{aligned}$$

となる. 以上によって z_i は超過需要関数の条件を満たすので均衡価格ベクトルが存在する.

それを $p^* = \{p^*_0, p^*_1, \dots, p^*_n\}$ とする. すると $\psi_i(p^*) \leq \mu(p^*) p^*_i (z_i(p^*) \leq 0)$ であり,

$p^*_i \neq 0$ に対しては $\psi_i(p^*) = \mu(p^*) p^*_i$ が成り立つ. しかし, $\psi_i(p^*)$ は定義上 (Δ から Δ' への関数) 負にはならないので $p^*_i = 0$ ならば $\psi_i(p^*) = 0$ であるからすべての i について $\psi_i(p^*) = \mu(p^*) p^*_i$ である. したがって, この式を 0 から n まで加えると

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \psi_i(p^*) &= \mu(p^*) \sum_{i=1}^n p^*_i \text{ が得られ,} \\ \sum_{i=1}^n \psi_i(p^*) &= \sum_{i=1}^n p^*_i = 1 \text{ であるから} \\ \mu(p^*) &= 1 \text{ を得る.} \end{aligned}$$

以上によって $\psi_i(p^*) = p^*_i$ でなければならないから p^* は ψ の不動点である. これで Δ から Δ' への任意の連続関数に不動点が存在することが証明された.

ところで, p_i の和も ψ_i の和も 1 に等しいので $n+1$ 番目の財については

$$\begin{aligned} p_n &= 1 - \sum_{i=1}^n p_i, \quad \psi_n(p) = 1 \\ -\sum_{i=1}^n \psi_i(p), \quad z_n(p) &= (1 \end{aligned}$$

$$-n\sum_{i=1}^n \psi_i(p)) - \mu(p)(1 - n\sum_{i=1}^n p_i) \quad (3)$$

$$\text{であり, } \mu(p) = \sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) + (1 - \sum_{i=1}^n p_i) (1 - \sum_{i=1}^n \psi_i(p)) \sum_{i=1}^n p_i^2 + (1 - \sum_{i=1}^n p_i)^2 \quad (4)$$

$$\text{である. } p_n z_n \text{ を求めると} \\ p_n z_n = (1 - n\sum_{i=1}^n p_i) (1 - n\sum_{i=1}^n \psi_i(p)) - \mu(p)(1 - n\sum_{i=1}^n p_i)^2 \quad (5)$$

となる. 一方(2) にそれぞれ p_i をかけて0 から $n-1$ まで加えると

$$n\sum_{i=1}^n p_i z_i = n\sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) - \mu(p) n\sum_{i=1}^n p_i^2 \quad (6)$$

* 超過需要関数は連続でワルラスの法則を満たせばよい。価格の減少関数でなくてもよい。価格はもともと和が1 になるように表されている（正規化されている）が、そうでなければ $\underline{p}_i = \sum_{n=1}^n p_i$ とし、 i を $\underline{p} = f(\underline{p}_0, \underline{p}_1, \dots, \underline{p}_n)$ の関数と考えれば0 次同次性も成り立つ。 $\underline{\cdot}$ も $\underline{p}_i$ で表せばよい。

が得られる。(5), (6) より

$$\sum_{n=1}^n p_i z_i = n\sum_{i=1}^n p_i \psi_i(p) + (1 - n\sum_{i=1}^n p_i) (1 - n\sum_{i=1}^n \psi_i(p)) - \mu(p) n\sum_{i=1}^n p_i^2 + (1 - n\sum_{i=1}^n p_i)^2 \quad \cdot \cdot \cdot$$

となるが, (4) より $\sum_{n=1}^n p_i z_i = 0$ が導かれるので(3) を考慮してもワルラスの法則が成り立つ。

企業の生産を含む経済の均衡について

財が $n+1$ 個, 生産要素が $m+1$ 個あるものとする。それぞれの価格を

$p_i, i = 0, 1, \dots, n, q_j, j = 0, 1, \dots, m$ で表す。消費者, 企業の数も2 以上である。企業は消費者から提供された生産要素を用い

て財を生産しそれらを販売して利潤を得る。消費者は企業に生産要素を提供して得た報酬で財を消費する。また消費者は企業の株主（所有者）でもある。まず企業 l の利潤は次のように表される。

$$\pi^l = p_0 \tilde{y}^l_0 + p_1 \tilde{y}^l_1 + \dots + p_n \tilde{y}^l_n - q_0 \tilde{x}^l_0 - q_1 \tilde{x}^l_1 - \dots - q_m \tilde{x}^l_m \tilde{y}^l_i$$

$\tilde{x}^l_j$ はそれぞれ企業 l による i 財の産出量および生産要素 j の投入量である。各企業は自らの生産能力（生産関数で表される）のもとで（価格を与えられたものとして）この利潤を最大化するように各財の産出量および各生産要素の投入量を決める（生産要素の投入量を決めれば財の産出量は生産関数によって決まる）。各企業による各生産要素の投入量および各財の産出量は財と生産要素の価格について連続であると仮定する（投入量, 産出量は価格の変化によって少しずつ変化する）。消費者 k が企業 l の所有権を slk の割合で持っているものとする ($0 \leq slk \leq 1$) と, 消費者 k の予算制約式は次のように表される。

$$p_0 x^k_0 + p_1 x^k_1 + \dots + p_n x^k_n = q_0 y^k_0 + q_1 y^k_1 + \dots + q_m y^k_m + \sum_l slk \pi^l$$

x^k_i は i 財の消費量（需要）, y^k_j は生産要素 j の供給量であり, $\sum_l slk \pi^l$ はこの消費者が保有する企業の割合に応じて受け取る利潤の合計である。各消費者はこの予算制約のもとで効用を最大化するように財の需要と生産要素の供給を決める（価格と企業の利潤を与えられたものとして）。その需要, 供給は財と生産要素の価格について連続であると仮定する。たとえば生産要素の価格が上がれば所得が増えるので財の消費量も増えるであろう（下級財ならば減るかもしれない）。その変化が連続的である

と仮定するのである．この式に企業の利潤を代入すると

$$p_0 x_{k0} + p_1 x_{k1} + \cdots + p_n x_{kn} = q_0 y_{k0} + q_1 y_{k1} + \cdots + q_m y_{km} + \sum_{l=1}^n s_{lk} (p_0 \tilde{y}_{l0} + p_1 \tilde{y}_{l1} + \cdots + p_n \tilde{y}_{ln} - q_0 \tilde{x}_{l0} - q_1 \tilde{x}_{l1} - \cdots - q_m \tilde{x}_{lm}) \quad \text{が得られる.}$$

$\sum_k s_{lk} = 1$ である（すべての消費者の各企業の所有割合の合計は1に等しい）から、

この式をすべての消費者について合計すると

$$p_0 \sum_k x_{k0} + p_1 \sum_k x_{k1} + \cdots + p_n \sum_k x_{kn} = q_0 \sum_k y_{k0} + q_1 \sum_k y_{k1} + \cdots + q_m \sum_k y_{km} + \sum_l (p_0 \tilde{y}_{l0} + p_1 \tilde{y}_{l1} + \cdots + p_n \tilde{y}_{ln} - q_0 \tilde{x}_{l0} - q_1 \tilde{x}_{l1} - \cdots - q_m \tilde{x}_{lm}) \quad \text{となる.}$$

i 財の需要、供給の合計 $\sum_k x_{ki}$ および $\sum_l \tilde{y}_{li}$ をそれぞれ $X_i, \tilde{Y}_i$ で、生産要素 j の（消費者による）供給の合計 $\sum_k y_{kj}$ 、（企業による）投入量の合計 $\sum_l \tilde{x}_{lj}$ をそれぞれ $Y_j, \tilde{X}_j$ で表すと上の式は

$$p_0 (X_0 - \tilde{Y}_0) + p_1 (X_1 - \tilde{Y}_1) + \cdots + p_n (X_n - \tilde{Y}_n) + q_0 (\tilde{X}_0 - Y_0) + q_1 (\tilde{X}_1 - Y_1) + \cdots + q_m (\tilde{X}_m - Y_m) = 0$$

と書き直される．この式は各財、各生産要素の超過需要と価格の積の合計がゼロに等しいことを表しており、企業による生産を含む経済におけるワルラスの法則を表す．財と生産要素の需要、供給が価格について連続であることから、生産要素の番号をあらためて $n+1$ から $n+m+2$ まで、価格を $p_j, j = n+1, n+2, \cdots, n+m+2$ と表すと財が

$n+m+2$ 個存在する交換経済の場合とまったく同じ手順で（ブラウワーの不動点定理を用いて）均衡の存在が証明される．

参考：供給の連続性 {簡単なケース企業が完全競争において一つの財をある費用関数のもとで生産しているとすると、価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ．したがって限界費用関数が連続であり、かつ価格が変化しても生産をやめなければ企業の供給は連続である．}

ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) について

これまでの議論を応用して戦略型ゲームにおけるナッシュ均衡について考えてみたい．ナッシュ均衡の存在は多価関数（対応）についての角谷の不動点定理を用いて証明されることが多いが、ナッシュ自身がブラウワーの不動点定理による証明を発表している．

各プレイヤーが m 個の戦略の選択肢を持つ n 人戦略型ゲームを考える． n, m は2以上有限の整数である．プレイヤー i の戦略の集合を S_i で、各戦略を s_{ij} で表す．混合戦略は S_i 上の確率分布として定義され p_i で表される．プレイヤー i が戦略 s_{ij} を選ぶ確率を p_{ij} とすると、すべての i について $\sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$ が成り立たなければならない．各プレイヤーの混合戦略の組をプロフィールと呼び $\mathbf{p}$ で表す．プロフィール $\mathbf{p}$ におけるプレイヤー i の期待利得を $\pi_i(\mathbf{p})$ で、そのプロフィールにおいて純粋戦略 s_{ij} を選んだときの利得を $\pi_i(s_{ij}, \mathbf{p}_{-i})$ とする． $\pi_i(\mathbf{p})$ は確率分布に関して連続であるとする*． $\mathbf{p}_{-i}$ はプロフィール $\mathbf{p}$ における i 以外のプレイヤーの戦略の組である． $\mathbf{p}_{-i}$ に対するプレイヤー i の最適反応 (best response) の集合 $\tilde{S}_i$ を次の条件を満たす純粋戦略および混合戦略の集合として定義する．

$S_i = \{s_{ij} \mid \text{すべての } s'_{ij} \in S_i \text{ について}$
 $\pi(s_{ij}, \mathbf{p}^{-i}) \geq \pi(s'_{ij}, \mathbf{p}^{-i})\}$

* 各プレイヤーの純粋戦略が有限個であり、その純粋戦略の組み合わせに対する各プレイヤーの利得が有限の値であれば期待利得は確率についての線形関数になるので連続である。この条件を満たす純粋戦略のみに正の確率を割り当てる混合戦略も最適反応である。各プレイヤーは他のプレイヤーの戦略を与えられたものとして最適反応である戦略を選ぶ。各プレイヤーが互いに最適反応である戦略を選んでいる状態がナッシュ均衡(Nash Equilibrium)である。

ここで次の関数を定義する。

$$\Psi_{ij}(\mathbf{p}) = p_{ij} + \max(\pi(s_{ij}, \mathbf{p}) - \pi(\mathbf{p}), 0)1 + \sum_{mk=1} \max(\pi(s_{ik}, \mathbf{p}) - \pi(\mathbf{p}), 0)$$

$\Psi_i = (\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \dots, \Psi_{im})$, $\Psi(\mathbf{p}) = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$ とする。各 Ψ_i は成分の値が0 から1 までで成分の和が1 であるような m 次元のベクトルであるから $m-1$ 次元の単体上の点である(単体の頂点は純粋戦略に対応する)。 Ψ は n 個のベクトル Ψ_i の組であるが Ψ_i の成分を n 人分並べて Ψ を表せば $n \times m$ 個の成分を持ったベクトルで表現される。独立な成分は $n(m-1)$ 個なので、可能な Ψ 全体の集合は $n(m-1)$ 次元空間内の図形であるが、それは $m-1$ 次元単体の n 個の積であるから凸である。もちろんこの図形の大きさは有限である。 $n(m-1)$ 次元空間内の凸である図形は適当に拡大縮小すれば同じ次元の単体を含むようにできる。 Ψ 全体の集合を表すこの図形と $n(m-1)$ 次元単体とを重心を合わせる形で、単体がこの図形に含まれるように配置し重心から外側へ向かって直線を引きそれが単体およびこの図形と交わる点を取り、重心から

それぞれの点までの距離に応じて単体の点をこの図形の点に対応させると連続的かつ1 対1 に対応する(「同相」であると言う)。すると $n(m-1)$ 次元単体 Δ からそれ自身への連続な関数をこの凸図形からそれ自身への連続な関数に移すことができる。 Ψ はこの図形からそれ自身への連続な関数であるから、ブラウワーの不動点定理によって不動点を持つ。不動点の一つを $\tilde{\mathbf{p}}$, それを構成するベクトルを $\tilde{p}_i$, その成分を $\tilde{p}_{ij}$ で表す。 $\tilde{\mathbf{p}}$ においてはすべての i, j について

$$\Psi_{ij} = \tilde{p}_{ij} \text{ が成り立つ。 } \Psi_{ij} \text{ の定義より}$$

$$\tilde{p}_{ij} + \max(\pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0)1 + \sum_{mk=1} \max(\pi(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \tilde{p}_{ij}$$

したがって

$$\max(\pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \tilde{p}_{ij} \sum_{mk=1} \max(\pi(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0)$$

が得られる。 $\lambda = \sum_{mk=1} \max(\pi(s_{ik}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0)$ とすると

$$\max(\pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \lambda \tilde{p}_{ij} \text{ となる。}$$

$\pi(\tilde{\mathbf{p}}) = \sum \{ \tilde{p}_{ij} > 0 \} \pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i})$ であるから「 $\tilde{p}_{ij} > 0$ であるような j のすべてについて

$$\max(\pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = \pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}) > 0$$

であってはならないので $\lambda = 0$ でなければならない。したがって

$$\max(\pi(s_{ij}, \tilde{\mathbf{p}}^{-i}) - \pi(\tilde{\mathbf{p}}), 0) = 0$$

を得る。よって $\tilde{\mathbf{p}}$ に正の確率で含まれる各プレイヤーの戦略はすべて最適反応である。各プレイヤーが互いに最適反応である戦略を選んでいるので、この状態はナッシュ均衡になっている。以上によってナッシュ均衡の存在が証明された。